Лекция 3. Векторлар өрісі және оның сипаттамалары. Гаусс теоремасы. Гаусс-Остроградский теоремасы.

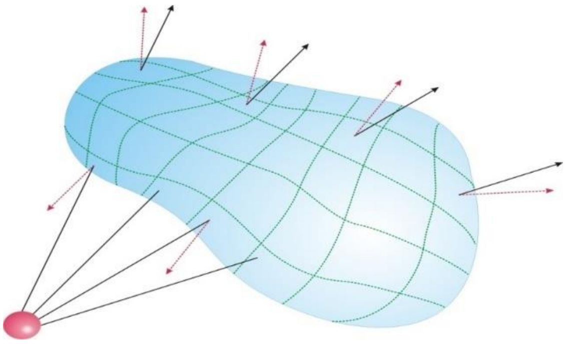
1. Векторлар өрісі.

Әр нүктесіне белгілі бір ғана вектор сәйкес қойылған кеңістікті ***векторлар өрісі*** дейді. Кез-келген нүктесінде жүргізілген жанамасының бағыты өрістің векторының бағытымен дәл келетін сызықтарды ***векторлар өрісінің сызықтары*** дейді. (Мысалы, $\vec{E}$ және $\vec{B}$ векторларының өрісі).
Өрістің сызықтары басталатын (аяқталатын) кеңістіктің нүктесінде оның ***көзі (құйылысы)*** бар дейді. Айналасында өрістің сызықтары ***тұйықталып*** тұрған нысанды ***өрістің құйыны*** дейді. (Мысалы, айнымалы электр, айнымалы магнит өрістері және электр тогы болады). Векторлар өрісі табиғаттары әртүрлі, көз және құйын деген физикалық нысандардың әсерінен болады. Кез-келген бетті перпендикуляр бағытта қиып өтетін өріс сызықтарының санын ***векторлар өрісінің ағыны*** дейді. Векторлар өрісіндегі кез-келген тұйық контур бойымен алынған вектордың интегралын ***өрістің циркуляциясы*** дейді.
Кез-келген векторлар өрісі өзінің **көзімен** және **құйынымен** толық анықталады. Көлем шамасын нөлге ұмтылдырғанда, оны қоршап тұрған сыртқа бағытталған ағын, өріс нүктесіндегі көздің қуатын, ал беттің ауданын нөлге ұмтылдырсақ, ол керіп тұрған тұйық контур бойынша алынған циркуляцияның, өріс нүктесіндегі құйынының қуатын береді.

Кернеулік сызығының ағыны – скалярлы шама. Сонымен, ***кернеулік ағыны*** *деп – белгілі бір бет арқылы өтетін күш сызықтарының санын айтады.* ***E*** сызықтарының жиілігі ***E*** - нің сан мәніне тең болатындай етіп таңдап алынатындықтан, ***E*** векторына перпендикуляр dS ауданшаны тесіп өтетін сызықтар саны сан жағынан $E\,dS$ - ке тең болады. Егер dS ауданшасы оған түсірілген нормаль E векторымен α бұрышын жасайтындай етіп бағдарланған болса, онда ауданшаны тесіп өтетін сызықтар саны сан жағынан мынаған тең болады: $E\,dS\,\cos\alpha = E_n dS$. Мұндағы E_n - ауданшаға түсірілген нормаль бойындағы ***E*** вектордың құраушысы.

E (кернеулік) вектор ағыны мынаған тең: $$\varPhi = \oint_S E_n dS . \qquad (1)$$

Ағын = (вектордың орташа нормаль құраушысы) х (беттің ауданы)



Тұйық бет арқылы ағып өтетін $\vec{E}$ векторының толық ағынын табу үшін элементар беттерге сәйкес келетін ағындардың қосындысын табамыз:

$$\Phi = \sum_i \vec{E}_i \cdot \vec{a}_i \qquad (2)$$

Егер элементар беттердің санын шексіз өсіріп, ал аудандарын шексіз азайтсақ, (2) өрнегі

$$\Phi = \oiint_{толык\,бет} \vec{E}\, d\vec{a} \qquad (3)$$

өрнегіне айналады.

Дәл осылай кез-келген тұйық емес беттен өтетін векторлар ағының анықтауға болады. Мысалы, сығылмайтын сұйықтың қозғалысын сипаттайтын жылдамдықтар өрісін $\vec{\vartheta}$ өрісін қарастырсақ, онда ағын

$$\Phi = \int_{\Delta S_n} \vec{\upsilon} \cdot d\vec{S} \qquad (4)$$

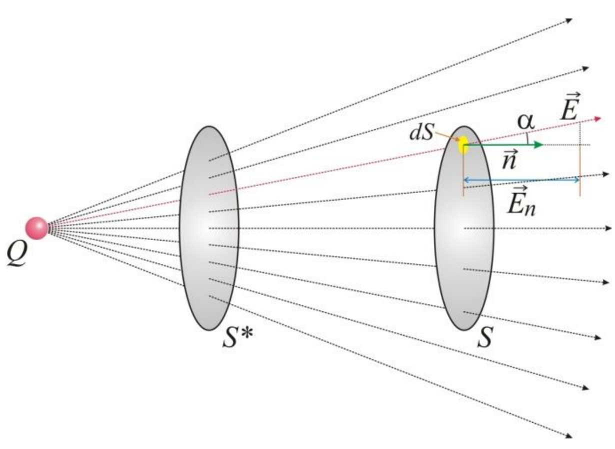
$\vec{\vartheta}$ бағытына перпендикуляр орналасқан ΔS_n беті арқылы бір өлшем уақытта ағып өтетін сұйық мөлшерін береді.

2. Гаусс теоремасы

Нүктелік оң q зарядының өрісін қарастырайық. Нүктелік оң q заряды радиусы r -ге тең сфера беттің центрінде орналассын. Сфера бетін тесіп өтетін өрістің ағынын табайық.

$$\Phi = \int_S E \cdot dS \cdot \cos\alpha$$

$$d\Phi_E = \vec{E} d\vec{S} = EdS\cos\alpha = E_n dS$$



Сфера беттің әр нүктесіндегі кернеуліктің $\vec{E}$ шамасы $E(R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^2}$ өрнегімен анықталады, ал бағыты сол нүктеде бетке жүргізілген сыртқы нормальмен бағыттас болады. Сонда сфера бет арқылы өтетін $\vec{E}$ векторының ағыны *Ф*

$$\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}q \tag{5}$$

Бұл өрнек *Гаусс теоремасын* анықтайды:

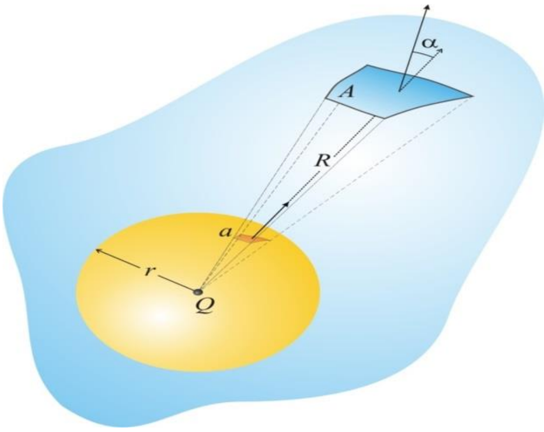
Сфера беттен өтетін электр өрісінің ағыны сфераның радиусына тәуелді болмай, тек сфера беттің ішінде орналасқан нүктелік заряд шамасымен анықталады. Егер сфера беттің ішінде заряд жоқ болса, онда одан өтетін электр өріснің ағыны нөлге тең болады.

Енді электр өрісінің $\vec{E}$ ағыны нүктелік зарядты қоршап тұрған тұйық беттің пішініне тәуелді болмайтындығын көрсетейік. Ол үшін жоғарыдағы сфера бетті қоршап тұрған *кез-келген пішінді* тұйық бет арқылы ағып өтетін $\vec{E}$ векторының ағынын есептеп, ол сфера бет арқылы өтетін ағынға тең болатындығын дәлелдейік.

$$\frac{\Delta S_2\cdot\cos\alpha}{\Delta S_1}=\frac{R^2}{r^2}$$

$$E(R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^2}\qquad \Delta S_1<\Delta S_2$$

$$\Phi(\Delta S_2)=E_{(R)}\cdot\Delta S_2\cdot\cos\alpha$$



$$\Phi(\Delta S_2)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^2}\cdot\frac{R^2}{r^2}\cdot\Delta S_1\cdot(\cos\alpha)^{-1}\cdot\cos\alpha$$

$$\Phi(\Delta S_2)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\Delta S_1=E(r)\Delta S_1=\Phi(\Delta S_1)$$

Зарядтардың дискретті таралуы кезінде: $\oint_S \vec{E}d\vec{S}=\oint_S E_n dS=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}Q_i$

Зарядтардың үздіксіз таралуы кезінде: $\oint_S \vec{E}d\vec{S}=\oint_S E_n d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\oint_V \rho dV$

Сыртқы тұйық беттің кез-келген бөлігіне электр өрісінің ағыны бірдей болатын сфера беттің бөлігін сәйкес қоюға болады. Сондықтан, сфера беттен және оны қоршап тұрған кез-келген тұйық бет арқылы өтетін электр өрісінің ағындары бірдей болады. Басқаша айтқанда, q зарядын қоршап тұрған кез-келген тұйық беттің арқылы ағып өтетін электр өрісінің $1/\varepsilon_0 q$ шамасына тең болады, яғни тұйық беттің пішініне , ол алып тұрған кеңістіктің көлеміне тәуелді емес. Тұйық бет ішінде заряд болмаса, ол арқылы өтетін ағын нөлге болады.

Егер өріс $q_1, q_2, ..., q_N$ қозғалмайтын зарядтар жиынының әсерінен пайда болып, олардың өрістерінің кернеуліктері $\vec{E}_1, \vec{E}_2, ..., \vec{E}_N$ болса, тәуелсіздіктің принципін пайдаланып, оларды қоршап тұрған S тұйық беті арқылы өтетін өрістің ағыны үшін

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot dS = \int_S \left(\vec{E_1} + \vec{E_2} + ... + \vec{E_n}\right) \cdot dS \qquad (6)$$

өрнегімен аламыз. Әр зарядтың әсерінен пайда болған өрістің ағынын (6) өрнегімен анықтасақ,

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV \qquad (7)$$

Сонымен, *кез-келген тұйық бет арқылы өтетін* $\vec{E}$ *электр өрісінің ағыны оның ішінде орналасқан зарядтардың шамасымен анықталады, оның пішініне, өлшеміне тәуелді болмайды.*
(7) өрнек арқылы анықталатын заңдылық Кулон заңымен балама. Сондықтан оны *Гаусс теоремасы* деп те атайды. *Кулон заңы және Гаусс теоремасы физикалық негіздері бірдей. Ол әртүрлі әдістермен берілген бір ғана заң.* Гаусс теоремасы- интеграл түрінде берілген Кулон заңы.

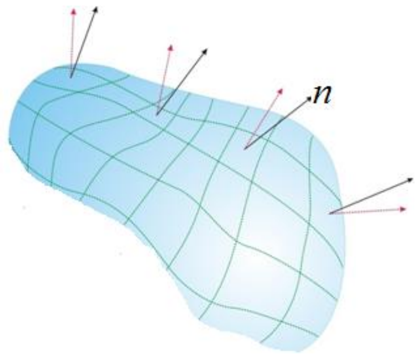
Қорытынды:

- Кез-келген тұйық бет арқылы өтетін электростатикалық өрістің ағыны оның ішінде орналасқан зарядтардың шамасымен (алгебралық қосындысымен анықталады), оның пішініне, өлшеміне тәуелді болмайды.
- Электростатикалық өрістің көзі - *заряд.*
- *Гаусс теоремасы,* біріншіден, зарядтардың өзара әсерлері олардың арақашықтықтарының квадратына кері пропорционал екендігіне, екіншіден, тәуелсіздік принципіне негізделген. Кулон заңы мен Гаусс теоремасы өзара балама.
- *Кулон заңының* көмегімен берілген тыныштықтағы зарядтар жүйесінің электр өрісін анықтауға болады. Ал, *Гаусс теоремасы* арқылы өріс нүктелеріндегі кернеуліктерді біле отырып, зарядтың шамасын анықтауға болады.

3. Өрістің дивергенциясы. Өріс көзі және құйылысы

Беттің бірлік нормалы *n* ретінде сыртқа бағытталған нормальды аламыз. Сонда беттің ішіне тұрғызылған нормаль теріс мән қабылдайды.

$$\Phi = \oiint_S \upsilon_n dS$$



Егер тұйық бет *S* сығылмайтын сұйық ағынының ішінде орналасқан, ал $\vec{\upsilon}$ сұйық молекулаларының орташа жылдамдығы десек, онда мынадай жағдайлар болуы мүмкін:

- S тұйық бетіне кірген сұйық мөлшері одан шыққан сұйық мөлшеріне тең болса, онда тұйық беттен шығатын агығ нөлге тең болады.

$$\Phi = 0$$

Тұйық бет ішінде сұйық молекулаларын жасап шығаратын көз, мысалы мұз болса, онда тұйық бетке ағып кіретін су молекулаларының саны одан ағып шығатын су молекулаларының санынан кем болып, тұйық беттен шығатын ағын оң мән қабылдайды. $\Phi > 0$

Тұйық бет ішінде енген су молекулаларын “жұтатын ” орталықтар болса, онда тұйық бет ішіне ағып кірген су молекулаларының саны одан ағып шығатын сандарынан артық болып, тұйық беттен шығатын ағын теріс қабылдайды.

$$\Phi < 0$$

Сонымен, тұйық бет ішінде су молекулаларын “тудыратын” **көз,** не оны “жұтатын” **құйылыс** болса, одан ағып шығатын ағын не оң, не теріс мән қабылдайды. Көз бен құйылыстың қуаттарын **дивергенция** деп атайды.

$$div\vec{\upsilon}(p) = \lim \frac{1}{V_S} \oiint \upsilon_n dS$$

4. Остоградский –Гаусс теоремасы және оның дифференциалдық түрі.

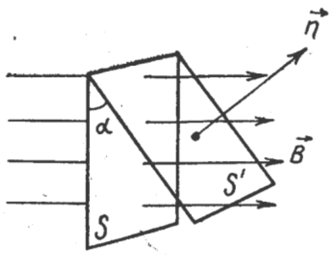
<u>Остроградский – Гаусс теоремасы.</u>

Егер магнит өрісінде индукция векторы $(\vec{B})$ шамасы жағынан барлық жерде бірдей және бағыттас болса, онда мұндай өрісті ***біртекті магнит өрісі*** деп атайды. Осындай өрісте индукция векторының күш сызықтары параллель келеді.

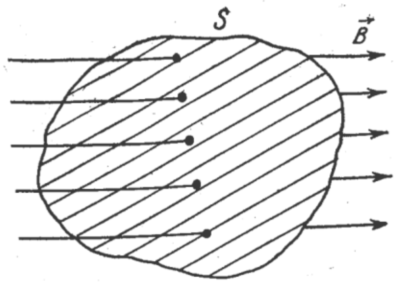
Осындай біртекті өрісте ауданы S бет перпендикуляр болып орналассын (7-сурет). Сонда магниттік индукция векторының $(\vec{B})$ жазық беттің ауданына (S) көбейтіндісі осы бет арқылы өтетін магнит ағыны деп аталады да, оны Ф әрпімен белгілейміз: $\Phi = BS$.

Егер $S^{/}$ жазық бет индукция векторына $\vec{n}$ нормаль бағыты бойынша α бұрыш жасай орналасса, онда магнит ағыны мынаған тең (7-сурет): $\Phi = BS'$.
мұндағы $S' = S\cos\alpha$ болғандықтан магнит ағыны былайша жазылады: $\Phi = BS\cos\alpha$. Магнит ағыны скалярлық шама. Әдетте магнит ағыны Ф ток жүріп тұрған белгілі бір контурмен байланысты болады, яғни бұранданың оң бағытымен сәйкес ток бағыты алынады. Сондықтан тұйық контурдың беті арқылы өткен магнит ағыны әр уақытта оң деп есептелінеді.

Кез-келген *S* бет арқылы өтетін *магнит ағыны* мына түрде жазылады (8-сурет): $\Phi = \int_S B_n dS$. Сол сияқты кез келген тұйық бет арқылы өтетін магнит ағыны әр уақытта нөлге тең болады: $\Phi = \oint_S B_n dS = 0$. Бұл өрнек магнит өрісі үшін ***<u>Остроградский – Гаусс теоремасы</u>*** деп аталады. Магнит ағыны вебермен (Вб) өлшенеді: 1Вб=1 Тл·м^2.



7 – сурет



8 - сурет

Электростатикалық өрістегі кулондық күштер, бүкіл әлемдік тартылыс кезіндегі ньютондық күштер және осы сияқты басқа да потенциалдық өрістердің тұйық контуры өтетін векторлар циркуляциясы нөлге тең болады:

$$\int_L B_L dl = 0 .$$

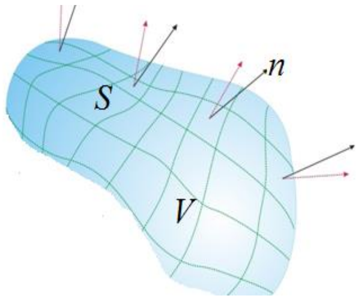
Енді вакуумдағы магнит өрісі үшін толық токтың заңдылығын тұжырымдайық: кез келген тұйық контур арқылы өтетін магнит индукциясы векторының циркуляциясы магнит тұрақтысын контур арқылы өтетін токтардың алгебралық қосындысына көбейткенге тең, яғни $\int_L B_L dl = \mu \sum_{i=1}^{n} I_i$

мұндағы n - контур арқылы өтетін ток саны. Егер электр өрісі кернеулігінің векторлар циркуляциясы $\oint E_L dl = 0$ болса, магнит өрісінің индукция векторының циркуляциясы нөлге тең болмайды. Сондықтан мұндай өрістерді *құйынды өріс* деп атайды.

Өріс көзінің қуаты мен ағынның арасындағы байланысты табайық.

$$(div\vec{\upsilon})_i \Delta V_i \approx \oint_{S_i} \upsilon_i dS \qquad \sum_i (div\vec{\upsilon})_i \Delta V_i \approx \sum_i \oint_{S_i} \upsilon_i dS$$

$$\sum_i \oint_{S_i} \upsilon_i dS = \oint_S \upsilon dS \qquad \sum_i (div\vec{\upsilon})_i \Delta V_i = \int_V div\vec{\upsilon}\, dV$$



Остоградский-Гаусс теоремасы

$$\int_V div\vec{\upsilon}\, dV = \oint_S \vec{\upsilon}\, dS$$

Остоградский-Гаусс теоремасы векторлар өрісінің дивергенциясынан көлем бойынша алынған интегралын осы көлемді қоршап тұрған тұйық бет арқылы ағып өтетін ағын шамасымен байланыстырады.

$$\oint_S \vec{E}\, dS = \int_V div\vec{E}\, dV \qquad \oint_S \vec{E}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV \qquad \int_V div\vec{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV \qquad div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Бұл Остоградский-Гаусс теоремасының электростатикалық өріс үшін жазылған дифференциалдық түрі. Яғни, **Кулон заңының диффренциалдық түрі**.

5. Векторлар өрісінің циркуляциясы, роторы

Тұйық контур бойымен алынған векторлар өрісінің циркуляциясы контурды керіп тұрған бетті тесіп өтетін құйындардың қуаттарының қосындысымен анықталады. Ал, құйын қуаты бет ауданы бір өлшемге тең бет керіп тұрған тұйық контур бойымен алынған векторлар өрісінің циркуляциясына тең.

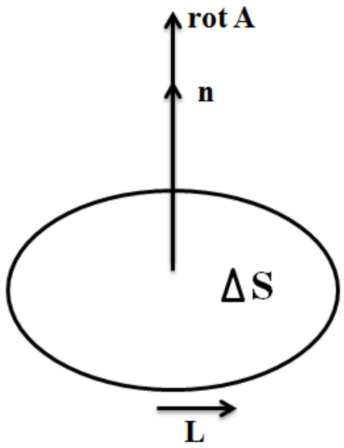
Векторлар өрісінің тұйық контур бойынша алынған циркуляциясы мен тұйық контур бойынша алынған циркуляциясы мен тұйық контурды керіп тұрған *S* бетті

Кез-келген S беті керіп тұрған тұйық Г контуры бойымен алынған векторлар өрісінің $L_Г$ *циркуляциясы S бетінің* ΔS_i *бөліктері тірелетін Элементар контурлар бойынша алынған* L_i *циркуляцияларының қосындысына тең.*

$$L_Г = \oint \vec{\upsilon}\, d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} \oint_{Г_i} \vec{\upsilon}_i\, d\vec{l}_i$$

$$L_Г = \sum_{i=1}^{N} L_i$$

Ішкі контурлар бойынша алынған интегралдарға қарама-қарсы бағыттарда жүріп өтілетін іргелес жолдар кіріп, олар бойынша алынған интегралдардың қосындыс нөлге айналады.



Векторлар өрісінің роторының шамасы, басқаша айтқанда, векторлар өрісінің құйынының қуаты ауданы нөлге ұмтылатын өте кішкене бет керіп тұрған тұйық контур бойымен алынған циркуляция.
Ротор- өрістің нүктесінің қасиетін сипаттайтын вектор. Ол векторлар өрісінің сәйкесті циркуляциясының ең үлкен мәніне сәйкесті контуры орналасқан жазықтыққа орналасқан жазықтыққа перпендикуляр.

Қорытынды:

- Кез-келген тұйық бет арқылы өтетін электростатикалық өрістің ағыны оның ішінде орналасқан зарядтардың шамасымен (алгебралық) қосындысымен анықталады, оның пішініне, өлшеміне тәуелді болмайды.
- Электростатикалық өрістің көзі- заряд;
- Әсерлесу күші «арақашықтықтың квадратынакері пропорционал» заңдылығымен өзгеретін кез келген физикалық өріс үшін Гаусс теоремасы орындалады. Кулон заңымен Гаусс теоремасы өзара балама;
- Кулон заңының көмегімен берілген тыныштықтағы зарядтар жүйесінің электр өрісін анықтауға болады. Ал, Гаусс теоремасы арқылы өрістің нүктелеріндегі кернеуліктерді біле отырып, зарядтың шамасын анықтауға мүмкіндік аламыз.
- Остоградский-Гаусс теоремасы бойынша, кез-келген тұйық беттен сыртқа қарай бағытталған векторлар өрісінің ағыны тұйық бет ішінде орналасқан өріс көздерінің қуаттарының қосындысымен анықталады;

- Электростатикалық өріс көзінің қуаты зарядтың тығыздығына тура пропорционал.
- Ротор – өрістің нүктесінің қасиетін сипаттайтын вектор. Ол векторлар өрісінің циркуляциясының ең үлкен мәніне сәйкесті контуры орналасқан жазықтыққа перпендикуляр.